

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им А.Ю.ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

Н.Г. Бураго, И.С. Никитин

**ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ
НА ПЛОСКИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫЕ УПРУГИЕ КОЛЬЦА
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

Препринт № 1124

Москва 2016

АННОТАЦИЯ

В работе аналитически, с использованием метода возмущений, решается задача о квазистатическом напряженно-деформированном состоянии плоского упругого тела (толстая кольцевая оболочка переменной толщины) под действием нормальной нагрузки на его внутреннюю поверхность.

Исследуется случай, соответствующий многим прикладным задачам, когда внутренний контур оболочки мало отличается от окружности. Определены напряженно-деформированное состояние и концентрация напряжений в окрестности участков относительно малого радиуса кривизны внутреннего контура упругого кольца.

Ключевые слова: кольцо переменной толщины, внутреннее давление, концентрация напряжений, метод возмущений

ISBN 978-5-91741-171-2

055(02)2 © Институт проблем механики РАН 2016 г.

Оглавление

Введение.....	4
1. Постановка и геометрия задачи	5
2. Асимптотический анализ	9
3. Решение задачи для первого приближения	12
4. Результаты расчетов.....	17
Выводы.....	23
Список литературы.....	24

Введение

Во многих технических устройствах используются элементы конструкций в виде дисков с кольцевыми сечениями переменной толщины по радиальной координате. Иные конструкции содержат трубчатые элементы с кольцевыми сечениями, причем внутренний или внешний контуры кольца не обязательно являются окружностями с постоянным радиусом. Для оценки квазистатической или циклической (усталостной) прочности необходимо определить упругое напряженно-деформированное состояние (НДС) этих элементов при характерных эксплуатационных воздействиях. В настоящее время расчет НДС, как правило, производится с использованием универсальных или специализированных конечно-элементных пакетов программ [1-4].

Однако во многих случаях характеристики геометрии упомянутых элементов конструкций содержат малые параметры (относительно слабое изменение толщины кольцевого диска по радиальной координате, малое отличие контура кольца трубы от окружности и т.п.). В этих ситуациях для решения задачи расчета напряжений можно использовать методы теории возмущений (разложения по малому параметру) [5]. С их помощью можно уменьшить размерность задачи и свести двумерную или даже трехмерную задачу теории упругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эту редуцированную систему в итоге можно решить аналитическим или численно-аналитическим методом [6-8].

В данной работе рассматривается задача о квазистатическом напряженно-деформированном состоянии плоского упругого тела (толстая кольцевая оболочка переменной толщины) под действием нормальной нагрузки на его внутреннюю поверхность. Заданы плотность ρ , модули упругости Ламе λ и μ материала оболочки и ее

геометрия. Исследуется случай, соответствующий многим прикладным задачам, когда отличным от окружности является только внутренний контур оболочки, внешний контур является окружностью.

Следует отметить, что случай, когда и внешний контур отличен от окружности, также легко рассматривается с помощью метода, предложенного в данной работе.

1. Постановка и геометрия задачи

Двумерная система уравнений теории упругости в полярной системе координат r и ϑ имеет вид (плоское деформированное состояние) [9]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} = 0$$

Напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\vartheta\vartheta}$, σ_{zz} , $\sigma_{r\vartheta}$ связаны с деформациями законом Гука

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta},$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta}, \quad \sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta}$$

Связь деформаций и смещений u_r , u_ϑ имеет вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right)$$

Форма внутреннего контура близка к окружности радиуса a и в полярной системе координат описывается уравнением $r = a + \varepsilon g(\vartheta)$. Внешний контур является окружностью радиуса b (Рис. 1).

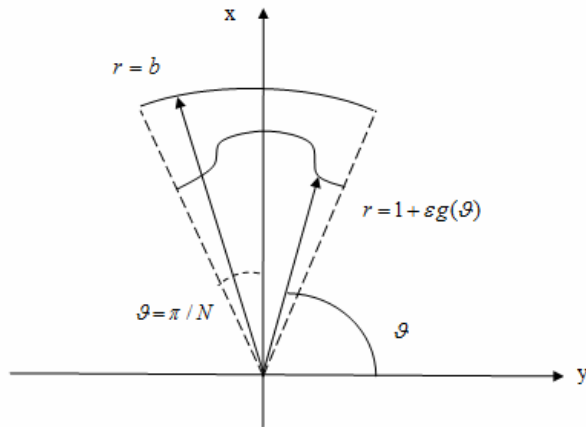


Рис. 1

Граничные условия на внутреннем контуре ($r = a + \varepsilon g(\vartheta)$): $\sigma_{rr} = -P_a$, $\sigma_{r\vartheta} = 0$.

Внешний контур ($r = b$) свободен от напряжений: $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{r\vartheta} = 0$.

В дальнейшем используются безразмерные напряжения, отнесенные к $\lambda + 2\mu$, все линейные величины обезразмерены на характерный радиус внутреннего контура кольца a .

Таким образом, форма внутренней границы определяется формулой $r = 1 + \varepsilon g(\vartheta)$, где $\varepsilon \ll 1$ - малый параметр, функция $g(\vartheta)$ определена при $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$.

Будем считать ее периодической функцией с периодом $-\pi/N \leq \vartheta \leq \pi/N$ (Рис. 2).

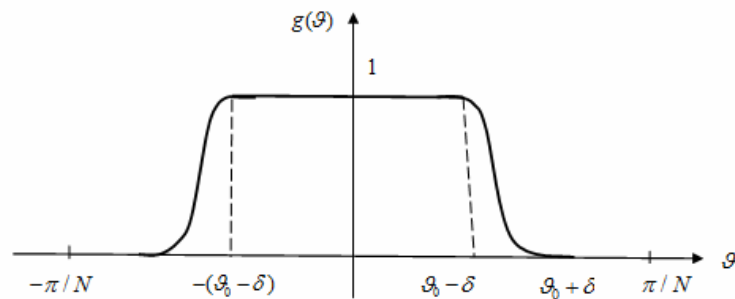


Рис. 2

Для решения конкретной задачи в дальнейшем она выбрана в виде (Рис. 2)

$$0 \leq |\vartheta| \leq \vartheta_0 - \delta: \quad g(\vartheta) = 1$$

$$\vartheta_0 - \delta < |\vartheta| \leq \vartheta_0 + \delta: \quad g(\vartheta) = \left(1 - \sin\left(\frac{\pi(\vartheta - \vartheta_0)}{2\delta}\right)\right) / 2$$

$$\vartheta_0 + \delta < |\vartheta| \leq \pi / N: \quad g(\vartheta) = 0$$

Разложения в ряд Фурье этой функции и ее производной имеют вид:

$$g(\vartheta) = g_0 / 2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos(kN\vartheta)$$

$$g'(\vartheta) = -\sum_{k=1}^{\infty} g_k kN \sin(kN\vartheta)$$

$$g_k = \frac{\sin(kN\vartheta_0)}{k} \frac{\pi/2}{(\pi/2 + kN\delta)} \frac{\sin(\pi/2 - kN\delta)}{(\pi/2 - kN\delta)}$$

Формула для коэффициентов написана в развернутом виде, чтобы наглядно представить результаты предельных переходов при $k \rightarrow 0$ и $kN\delta \rightarrow \pi/2$.

При $k=0$ выражение для g_0 имеет $g_0 = 2N\vartheta_0 / \pi$.

На рис. 3 представлен фрагмент границы внутреннего контура для определения компонент нормали к этому контуру через функцию $g(\vartheta)$, описывающую его форму.

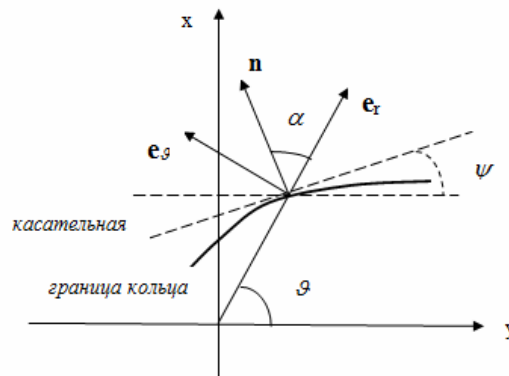


Рис. 3

Угол α , который составляет направление нормали к внутреннему контуру с радиальным направлением, можно выразить через полярный угол ϑ и наклон касательной ψ к линии внутреннего контура (Рис. 3)

$$\alpha = \psi + \pi / 2 - \vartheta$$

Наклон касательной можно определить следующим образом

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx}, \quad dy = \sin \vartheta dr + r \cos \vartheta d\vartheta, \quad dx = \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta, \quad dr = \varepsilon g' d\vartheta$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\cos \vartheta + \varepsilon(g \sin \vartheta)'}{\sin \vartheta - \varepsilon(g \cos \vartheta)'}$$

Отсюда можно получить искомые приближенные формулы для определения α с необходимой в дальнейшем точностью

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\psi + \pi / 2 - \vartheta) = -\frac{1 + \varepsilon g}{\varepsilon g'}$$

$$\sin \alpha = \varepsilon g' + O(\varepsilon^3), \quad \cos \alpha = 1 - \varepsilon^2 g'^2 / 2 + O(\varepsilon^3)$$

Компоненты нормали будут равны

$$n_r = \cos \alpha, \quad n_\vartheta = \sin \alpha$$

Для краткости выражений в дальнейшем введем обозначения

$$\sigma = \sigma_{rr}, \quad s = \sigma_{\vartheta\vartheta}, \quad \tau = \sigma_{r\vartheta}, \quad \Sigma = \sigma_{zz}, \quad u_r = u, \quad u_\vartheta = v$$

Выражения для нормальных и касательных напряжений на внутреннем контуре после несложных, но громоздких выкладок, можно привести к виду

$$\sigma_{nn} = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma \cos^2 \alpha + 2\tau \sin \alpha \cos \alpha + s \sin^2 \alpha$$

$$\sigma_{nr}^2 = |\sigma_{ij} n_j|^2 - |\sigma_{ij} n_i n_j|^2 = (\sigma - s)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \tau^2 (1 - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) + 2\tau \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) (\sigma - s)$$

2. Асимптотический анализ

Представим решение двумерной системы уравнений теории упругости в полярной системе координат в виде частичного асимптотического разложения по малому параметру $\varepsilon \ll 1$:

$$\sigma(r, \vartheta) = \sigma_0(r) + \varepsilon \sigma_1(r, \vartheta), \quad s(r, \vartheta) = s_0(r) + \varepsilon s_1(r, \vartheta), \quad \tau(r, \vartheta) = \varepsilon \tau_1(r, \vartheta)$$

$$u(r, \vartheta) = u_0(r) + \varepsilon u_1(r, \vartheta), \quad v(r, \vartheta) = \varepsilon v_1(r, \vartheta)$$

Для постановки граничных условий на внутреннем контуре можно вывести приближенные асимптотические представления

$$\sigma|_{r=1+\varepsilon g} = \sigma|_{r=1} + \varepsilon g \sigma'|_{r=1}, \quad s|_{r=1+\varepsilon g} = s|_{r=1} + \varepsilon g s'|_{r=1}, \quad \tau|_{r=1+\varepsilon g} = \tau|_{r=1} + \varepsilon g \tau'|_{r=1}$$

$$\sigma_{nn}|_{r=1+\varepsilon g} = \sigma_0 + \varepsilon(\sigma_1 + g\sigma'_0) + O(\varepsilon^2)$$

$$\sigma_{nr}^2|_{r=1+\varepsilon g} = \varepsilon^2 (\tau_1^2 + 2g'(s_0 - \sigma_0)\tau_1 + (s_0 - \sigma_0)^2 g'^2) + o(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 (\tau_1 + g'(s_0 - \sigma_0))^2 + o(\varepsilon^2)$$

Подставим эти асимптотические разложения в двумерную систему уравнений теории упругости и граничные условия, приравняем члены при нулевой и первой степени малого параметра ε . В результате получим две задачи для первых членов разложения компонент смещений и напряжений.

Осесимметричная задача для нулевого приближения

$$\frac{d\sigma_0}{dr} + \frac{\sigma_0 - \sigma_0}{r} = 0$$

$$\sigma_0 = (\lambda + 2\mu) \frac{du_0}{dr} + \lambda \frac{u_0}{r}$$

$$s_0 = \lambda \frac{du_0}{dr} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_0}{r}$$

Граничные условия:

$$\sigma_0|_{r=1} = -P_a, \quad \sigma_0|_{r=b} = 0$$

Распределение компонент напряжений (и их производных) для осесимметричного нагружения невозмущенного внутреннего контура ($\varepsilon = 0$) давлением P_a (задача для нулевого приближения) хорошо известно и определяется формулами [9]:

$$\begin{aligned} \sigma_0(r) &= -\frac{P_a}{(b^2-1)} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right), & \sigma'_0(r) &= \frac{P_a}{(b^2-1)} \frac{2b^2}{r^3} \\ s_0(r) &= \frac{P_a}{(b^2-1)} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right), & s_0 - \sigma_0 &= \frac{P_a}{(b^2-1)} \frac{2b^2}{r^2} \end{aligned}$$

В дальнейшем будем использовать это решение.

Учтем, что при $r=1$ $\sigma'_0 = s_0 - \sigma_0 = 2P_a b^2 / (b^2 - 1)$.

Двумерная задача для первого приближения формулируется в следующем виде

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_1}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_1 - s_1}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_1}{\partial \vartheta} + \frac{2\tau_1}{r} = 0$$

$$\sigma_1 = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} + \lambda \frac{u_1}{r}$$

$$s_1 = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \vartheta} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_1}{r}$$

$$\tau_1 = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \right)$$

Граничные условия:

$$\sigma_1|_{r=1} = -\sigma'_0|_{r=1} g(\vartheta), \quad \tau_1|_{r=1} = -(s_0 - \sigma_0)|_{r=1} g'(\vartheta)$$

$$\sigma_1|_{r=b} = 0, \quad \tau_1|_{r=b} = 0$$

Решение двумерной задачи для первого приближения будем строить с помощью разложения искомых функций в ряды Фурье, соответствующие разложению в эти ряды правых частей граничных условий, т.е. функций $g(\vartheta)$ и $g'(\vartheta)$:

$$\sigma_1(r, \vartheta) = \sigma_{10}(r) / 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{1k}(r) \cos(kN\vartheta), \quad s_1(r, \vartheta) = s_{10}(r) / 2 + \sum_{k=1}^{\infty} s_{1k}(r) \cos(kN\vartheta),$$

$$u_1(r, \vartheta) = u_{10}(r) / 2 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k}(r) \cos(kN\vartheta),$$

$$\tau_1(r, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{1k}(r) \sin(kN\vartheta),$$

$$v_1(r, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{1k}(r) \sin(kN\vartheta)$$

Для коэффициентов Фурье этих разложений, зависящих от радиальной координаты, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\sigma_{1k}}{dr} + \frac{n\tau_{1k}}{r} + \frac{\sigma_{1k} - s_{1k}}{r} = 0$$

$$\frac{d\tau_{1k}}{dr} - \frac{ns_{1k}}{r} + \frac{2\tau_{1k}}{r} = 0$$

$$\sigma_{1k} = \frac{du_{1k}}{dr} + \bar{\lambda} \frac{nv_{1k}}{r} + \bar{\lambda} \frac{u_{1k}}{r}$$

$$s_{1k} = \bar{\lambda} \frac{du_{1k}}{dr} + \frac{nv_{1k}}{r} + \frac{u_{1k}}{r}$$

$$\tau_{1k} = \bar{\mu} \left(-\frac{nu_{1k}}{r} + \frac{dv_{1k}}{dr} - \frac{v_{1k}}{r} \right)$$

Граничные условия

$$\sigma_{1k} \Big|_{r=1} = \Sigma_{1k}, \quad \tau_{1k} \Big|_{r=1} = T_{1k}$$

$$\sigma_{1k} \Big|_{r=b} = 0, \quad \tau_{1k} \Big|_{r=b} = 0$$

где $\Sigma_{1k} = -\sigma'_0 \Big|_{r=1} g_k$, $T_{1k} = (s_0 - \sigma_0) \Big|_{r=1} ng_k$

С учетом решений для нулевого приближения

$$\Sigma_{1k} = -2P_a g_k b^2 / (b^2 - 1), \quad T_{1k} = 2nP_a b^2 g_k / (b^2 - 1)$$

Здесь и в дальнейшем для краткости приняты обозначения $n = kN$,

$\bar{\lambda} = \lambda / (\lambda + 2\mu)$, $\bar{\mu} = \mu / (\lambda + 2\mu)$. Из этой системы можно исключить s_{1k} по формуле

$$s_{1k} = \bar{\lambda} \sigma_{1k} + (1 - \bar{\lambda}^2) \frac{(u_{1k} + nv_{1k})}{r}$$

В итоге получим систему однородных по радиальной координате обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$\frac{d\sigma_{1k}}{dr} + (1 - \bar{\lambda}) \frac{\sigma_{1k}}{r} + \frac{n\tau_{1k}}{r} - (1 - \bar{\lambda}^2) \frac{(u_{1k} + nv_{1k})}{r^2} = 0$$

$$\frac{d\tau_{1k}}{dr} + \frac{2\tau_{1k}}{r} - \bar{\lambda} \frac{n\sigma_{1k}}{r} - (1 - \bar{\lambda}^2) \frac{n(u_{1k} + nv_{1k})}{r^2} = 0$$

$$\frac{du_{1k}}{dr} + \bar{\lambda} \frac{u_{1k}}{r} + \bar{\lambda} \frac{nv_{1k}}{r} - \sigma_{1k} = 0$$

$$\frac{dv_{1k}}{dr} - \frac{v_{1k}}{r} - \frac{nu_{1k}}{r} - \frac{\tau_{1k}}{\bar{\mu}} = 0$$

Граничные условия:

$$\sigma_{1k} \Big|_{r=1} = \Sigma_{1k}, \quad \tau_{1k} \Big|_{r=1} = T_{1k}$$

$$\sigma_{1k} \Big|_{r=b} = 0, \quad \tau_{1k} \Big|_{r=b} = 0$$

3. Решение задачи для первого приближения

Общее решение этой системы будем искать в виде суммы четырех фундаментальных степенных решений с показателями γ_l , подлежащими определению:

$$\sigma_{1k} = \sum_{l=1}^4 \sigma_{kl} r^{\gamma_l - 1}, \quad \tau_{1k} = \sum_{l=1}^4 \tau_{kl} r^{\gamma_l - 1}, \quad u_{1k} = \sum_{l=1}^4 u_{kl} r^{\gamma_l}, \quad v_{1k} = \sum_{l=1}^4 v_{kl} r^{\gamma_l}$$

Система ОДУ перейдет в однородную линейную систему 4 уравнений

$$(\gamma_l - \bar{\lambda})\sigma_{kl} + n\tau_{kl} - (1 - \bar{\lambda}^2)u_{kl} - n(1 - \bar{\lambda}^2)v_{kl} = 0$$

$$\bar{\lambda}n\sigma_{kl} - (\gamma_l + 1)\tau_{kl} + (1 - \bar{\lambda}^2)nu_{kl} + (1 - \bar{\lambda}^2)n^2v_{kl} = 0$$

$$\sigma_{kl} - (\gamma_l + \bar{\lambda})u_{kl} - \bar{\lambda}nv_{kl} = 0$$

$$\tau_{kl} + \bar{\mu}nu_{kl} - \bar{\mu}(\gamma_l - 1)v_{kl} = 0$$

Исключая из этой системы σ_{kl} и τ_{kl} , получим два однородных уравнения для u_{kl} и v_{kl}

$$(\gamma_l^2 - \bar{\mu}n^2 - 1)u_{kl} + (\bar{\lambda}\gamma_l + \bar{\mu}\gamma_l - \bar{\mu} - 1)nv_{kl} = 0$$

$$(\bar{\lambda}\gamma_l + \bar{\mu}\gamma_l + \bar{\mu} + 1)nu_{kl} + (n^2 - \bar{\mu}\gamma_l^2 + \bar{\mu})v_{kl} = 0$$

Детерминант D этой системы равен

$$D = \bar{\mu}\gamma_l^4 - 2\bar{\mu}(n^2 + 1)\gamma_l^2 + \bar{\mu}(n^2 - 1)^2$$

Приравнивая его нулю для разрешимости однородной системы, получим действительные значения четырех степенных показателей γ_l :

$$\gamma_{1,2} = \pm(n+1), \quad \gamma_{3,4} = \pm(n-1)$$

Имеют место соотношения

$$v_{kl} = q_{kl}u_{kl}, \quad q_{kl} = -n \frac{\gamma_l(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) + 1 + \bar{\mu}}{n^2 - \bar{\mu}(\gamma_l^2 - 1)}$$

$$\sigma_{kl} = (\gamma_l + \bar{\lambda})u_{kl} + \bar{\lambda}nv_{kl}, \quad \tau_{kl} = -\bar{\mu}nu_{kl} + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)v_{kl}$$

Из них несложно получить выражения для констант степенного разложения

$$\sigma_{kl} = ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})u_{kl}, \quad \tau_{kl} = (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})u_{kl}$$

И далее функции – коэффициенты Фурье, зависящие от радиальной координаты

$$\sigma_{1k} = \sum_{l=1}^4 ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})u_{kl}r^{\gamma_l - 1}$$

$$\tau_{1k} = \sum_{l=1}^4 (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})u_{kl}r^{\gamma_l - 1}$$

Эти функции следует подставить в граничные условия, из которых получим разрешающую систему для четырех неизвестных u_{kl} , $l=1,4$ при любых $k=1,2,3,\dots$

$$\sum_{l=1}^4 ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})u_{kl} = \Sigma_{1k}$$

$$\sum_{l=1}^4 (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})u_{kl} = T_{1k}$$

$$\sum_{l=1}^4 ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})u_{kl}b^{\gamma_l - 1} = 0$$

$$\sum_{l=1}^4 (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})u_{kl}b^{\gamma_l - 1} = 0$$

Неизвестные u_{kl} из этой системы найти несложно, но формулы будут иметь громоздкий, мало обозримый вид.

Найдем приближенные, но весьма близкие к точным, решения этой системы для важного прикладного случая $n = kN \gg 1$. Этот случай выполняется, если внутренний контур кольца состоит из многих, периодически повторяющихся участков. Для этого достаточно, чтобы $N \gg 1$.

Сделаем замену переменных

$$u_{k1} = U_{k1} / b^{2n}, \quad u_{k2} = U_{k2}, \quad u_{k3} = U_{k3} / b^{2n}, \quad u_{k4} = U_{k4}$$

Система примет вид

$$\sum_{l=1,3} ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})U_{kl} / b^{2n} + \sum_{l=2,4} ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda}nq_{kl})U_{kl} = \Sigma_{1k}$$

$$\sum_{l=1,3} (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})U_{kl} / b^{2n} + \sum_{l=2,4} (-\bar{\mu}n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1)q_{kl})U_{kl} = T_{1k}$$

$$\sum_{l=1,4} ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} n q_{kl}) U_{kl} + \sum_{l=2,3} ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} n q_{kl}) U_{kl} / b^2 = 0$$

$$\sum_{l=1,4} (-\bar{\mu} n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1) q_{kl}) U_{kl} + \sum_{l=2,3} (-\bar{\mu} n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1) q_{kl}) U_{kl} / b^2 = 0$$

Отсюда видно, что в принятых предположениях первыми двумя членами в первых двух уравнениях системы можно пренебречь за счет степенного множителя $1/b^{2n} \ll 1$.

При этом система расщепляется, и неизвестные находятся поочередно из двух пар уравнений.

Первая пара уравнений относительно u_{k2} и u_{k4}

$$\sum_{l=2,4} ((\gamma_l + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} n q_{kl}) u_{kl} = \Sigma_{1k}$$

$$\sum_{l=2,4} (-\bar{\mu} n + \bar{\mu}(\gamma_l - 1) q_{kl}) u_{kl} = T_{1k}$$

И затем вторая пара уравнений относительно u_{k1} и u_{k3}

$$((\gamma_1 + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} n q_{k1}) u_{k1} + ((\gamma_3 + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} n q_{k3}) u_{k3} / b^2 = -(((\gamma_4 + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} n q_{k4}) u_{k4} + ((\gamma_2 + \bar{\lambda}) + \bar{\lambda} n q_{k2}) u_{k2} / b^2) / b^{2n}$$

$$(-\bar{\mu} n + \bar{\mu}(\gamma_1 - 1) q_{k1}) u_{k1} + (-\bar{\mu} n + \bar{\mu}(\gamma_3 - 1) q_{k3}) u_{k3} / b^2 = -((-\bar{\mu} n + \bar{\mu}(\gamma_4 - 1) q_{k4}) u_{k4} + (-\bar{\mu} n + \bar{\mu}(\gamma_2 - 1) q_{k2}) u_{k2} / b^2) / b^{2n}$$

Этими неизвестными в итоге можно пренебречь.

Решим систему относительно u_{k2} и u_{k4} .

После вычисления коэффициентов эту систему можно записать в виде

$$(n+1)u_{k2} + \frac{(n-1)(n+2)}{(n+2\bar{\mu}/(\bar{\lambda} + \bar{\mu}))} u_{k4} = -\Sigma_{1k} / (2\bar{\mu})$$

$$(n+1)u_{k2} + \frac{(n-1)n}{(n+2\bar{\mu}/(\bar{\lambda} + \bar{\mu}))} u_{k4} = -T_{1k} / (2\bar{\mu})$$

Из нее следуют решения

$$u_{k4} = \frac{(n + 2\bar{\mu} / (\bar{\lambda} + \bar{\mu}))(T_{1k} - \Sigma_{1k})}{4\bar{\mu}(n-1)}, \quad u_{k2} = \frac{n\Sigma_{1k} - (n+2)T_{1k}}{4\bar{\mu}(n+1)}$$

$$\Sigma_{1k} = -2P_a g_k b^2 / (b^2 - 1), \quad T_{1k} = 2nP_a b^2 g_k / (b^2 - 1)$$

Или

$$u_{k2} = -\frac{P_a g_k}{2\bar{\mu}} \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \frac{n(n+3)}{(n+1)}, \quad u_{k4} = \frac{P_a g_k}{2\bar{\mu}} \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \frac{(n + 2\bar{\mu} / (\bar{\lambda} + \bar{\mu}))(n+1)}{(n-1)}$$

Выражения для коэффициентов Фурье напряжений приобретут вид

$$\sigma_{1k} = P_a g_k \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \left(\frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{(n+1)(n+2)}{r^n} \right)$$

$$\tau_{1k} = P_a g_k \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \left(\frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{n(n+1)}{r^n} \right)$$

$$s_{1k} = -P_a g_k \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \left(\frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{(n+1)(n-2)}{r^n} \right)$$

Значение σ_{10} , соответствующее малой осесимметричной добавке в нагрузку на внутренний контур из-за отклонения его формы от окружности, определим отдельно:

$$\sigma_{10}|_{r=1} = -2P_a \frac{g_0}{2} \frac{b^2}{(b^2 - 1)} = -2P_a \frac{Ng_0}{\pi} \frac{b^2}{(b^2 - 1)}$$

Эту поправку, умноженную на ε , можно включить в исходное давление P_a , приложенное к внутреннему контуру. Таким образом, осесимметричное решение следует строить, исходя из нормальной нагрузки, равной $-P_a^*$, где

$$P_a^* = P_a \left(1 + \varepsilon \frac{2g_0}{(\pi / N)} \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \right)$$

Окончательное решение для радиальных и касательных напряжений примет вид:

$$1 + \varepsilon g(\vartheta) \leq r \leq b, \quad -\pi / N \leq \vartheta \leq \pi / N$$

$$\sigma(r, \vartheta) = \sigma_0^*(r) + \varepsilon P_a \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{(n+1)(n+2)}{r^n} \right) \cos(kN\vartheta)$$

$$s(r, \vartheta) = s_0^*(r) - \varepsilon P_a \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{(n+1)(n-2)}{r^n} \right) \cos(kN\vartheta)$$

$$\tau(r, \vartheta) = \varepsilon P_a \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{n(n+1)}{r^n} \right) \sin(kN\vartheta)$$

$$\sigma_0^*(r) = -\frac{P_a^*}{(b^2 - 1)} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right), \quad s_0^*(r) = \frac{P_a^*}{(b^2 - 1)} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right)$$

$$g_k = \frac{\sin(kN\vartheta_0)}{k} \frac{\pi/2}{(\pi/2 + kN\delta)} \frac{\sin(\pi/2 - kN\delta)}{(\pi/2 - kN\delta)}, \quad n = kN$$

Таким образом, решение достаточно сложной двумерной задачи теории упругости с использованием метода разложения по малому параметру удалось получить в виде рядов Фурье с известными коэффициентами, которые можно просуммировать численно, добившись практической сходимости сумм конечного числа членов ряда.

4. Результаты расчетов

Расчеты по этим формулам были проведены для следующих значений параметров задачи: $N=12$, $b=1.33$, $\vartheta_0 = 0.653\pi / N = 0.171$, $\pi / N = 0.262$, $\delta = 0.163\vartheta_0 = 0.028$, $\vartheta_1 = \vartheta_0 - \delta = 0.143$, $\vartheta_2 = \vartheta_0 + \delta = 0.199$, $P_a = 0.001$.

При суммировании рядов Фурье практическая сходимость с большим запасом достигалась при $k_{\max} \sim 30$.

На рис. 4-7 показаны линии уровня компонент напряжений σ , τ , s и корня из второго инварианта девиатора тензора напряжений

$\sqrt{I_2} = \sqrt{((\sigma - s)^2 + (\sigma - \Sigma)^2 + (s - \Sigma)^2 + 6\tau^2)} / 6$, определяющего начало процесса пластического течения. Область изолиний представляет собой элемент периодической структуры кольца $0 \leq |\vartheta| \leq \pi / N$ и $1 \leq r \leq 1.33$. В окрестности линии излома внутреннего контура хорошо видна зона концентрации напряжений, особенно для τ , s и $\sqrt{I_2}$.

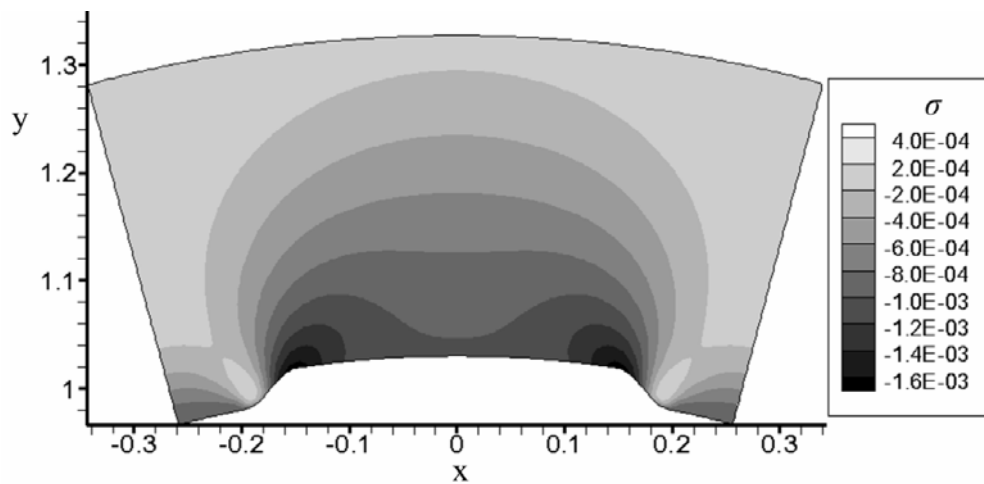


Рис. 4

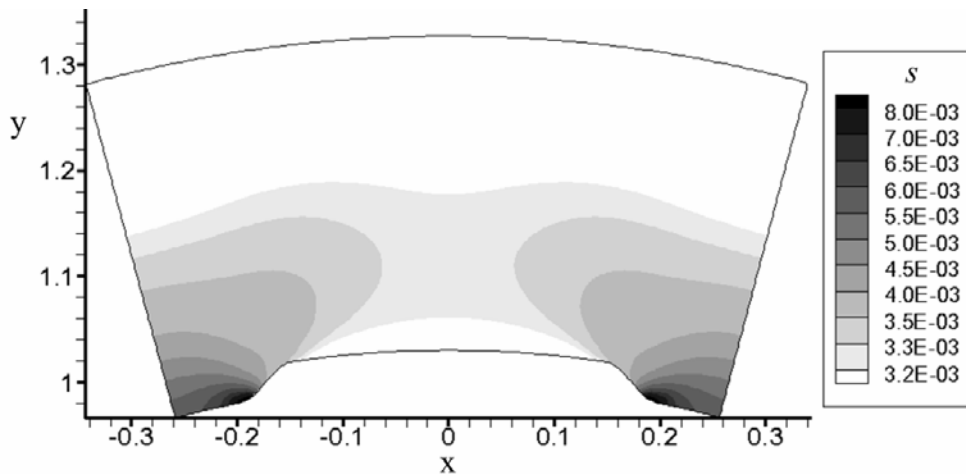


Рис. 5

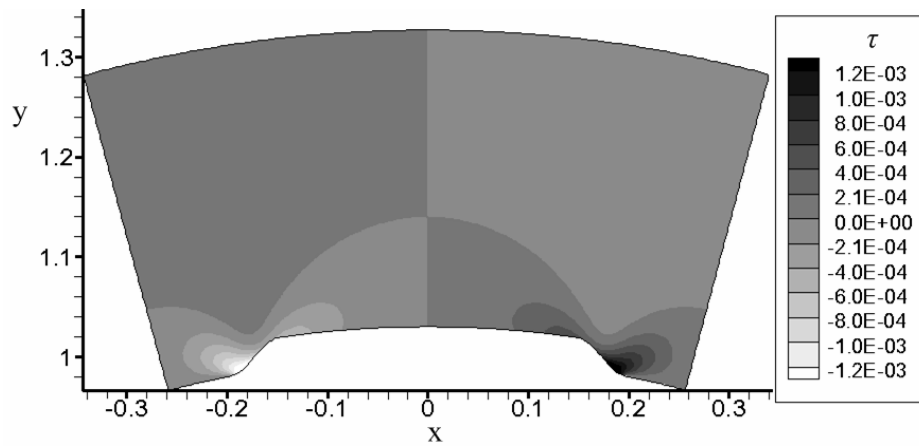


Рис. 6

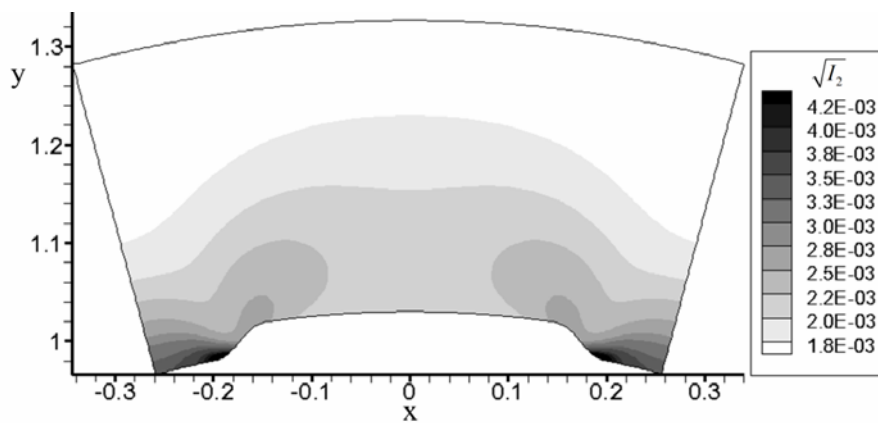


Рис. 7

Примеры расчетов полей напряжений для внутренней поверхности кольца, представляющей собой чистую косинусоиду, для $N=12$ показаны на рис. 8-10. Эта форма соответствует значениям параметров $\vartheta_0 = \pi / (2N)$, $\delta = \vartheta_0$.

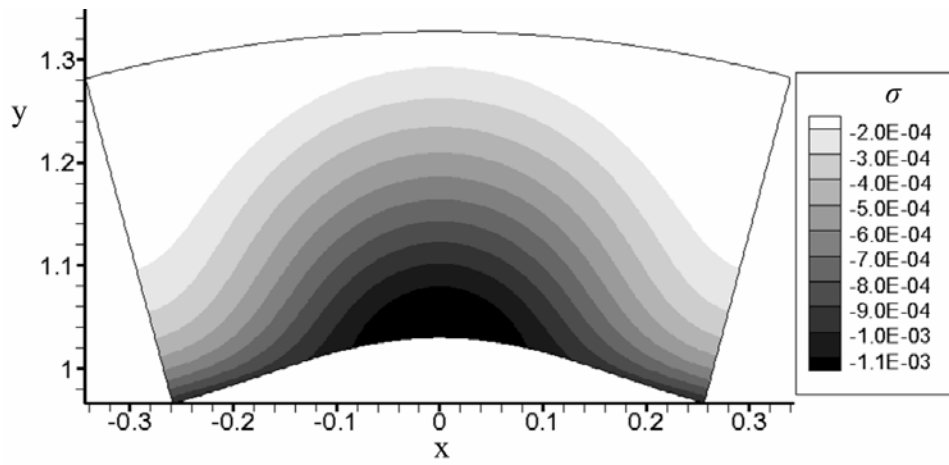


Рис. 8

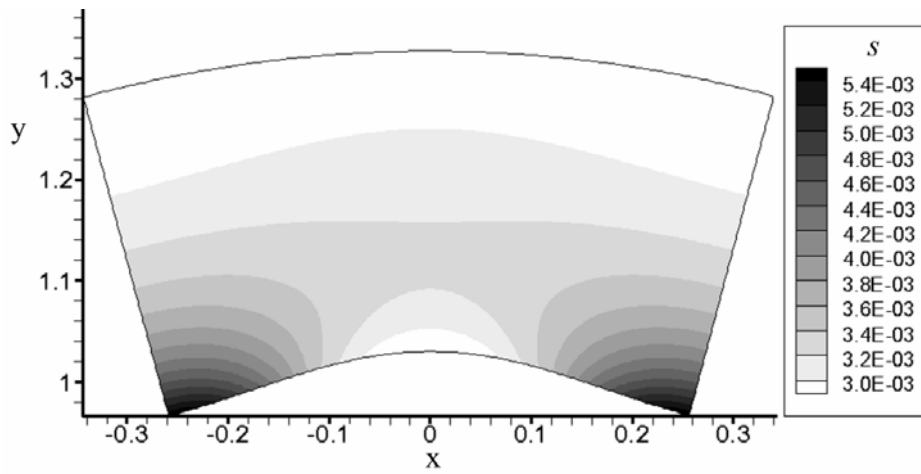


Рис. 9

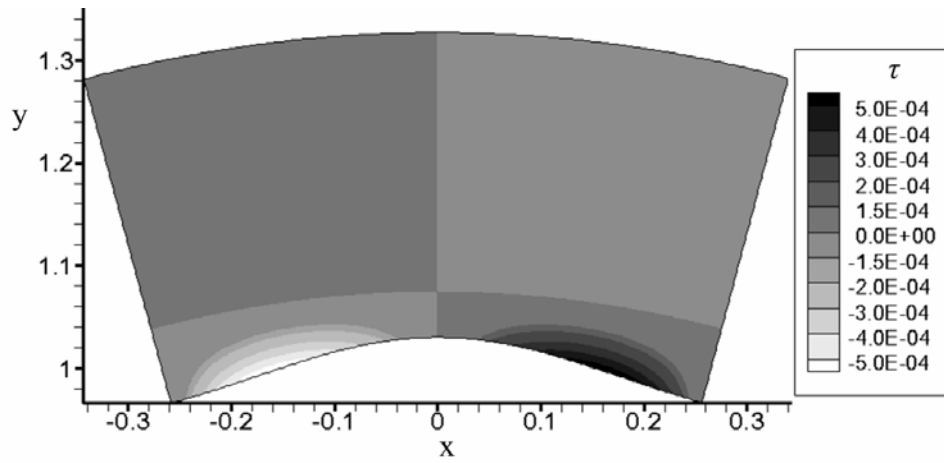


Рис. 10

Примеры расчетов полей напряжений для внутренней поверхности кольца, представляющей собой чистую косинусоиду, для $N=24$ показаны на рис. 11-13.

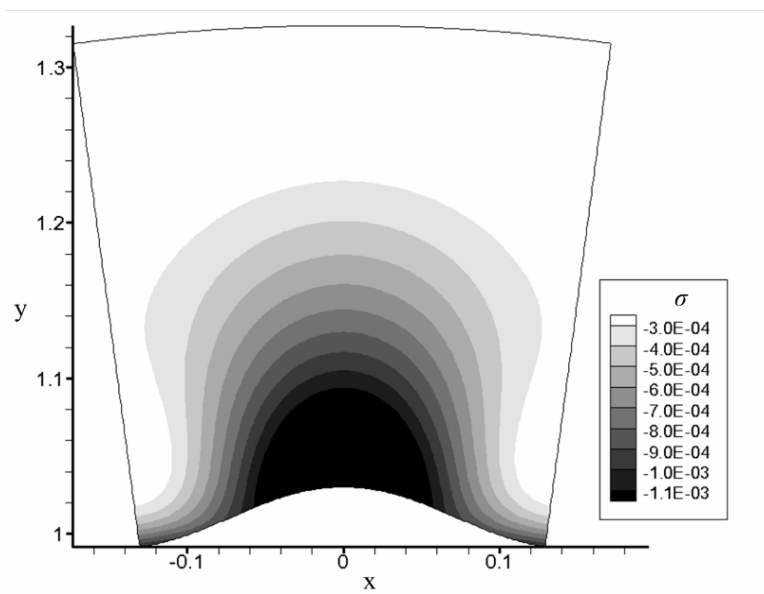


Рис. 11

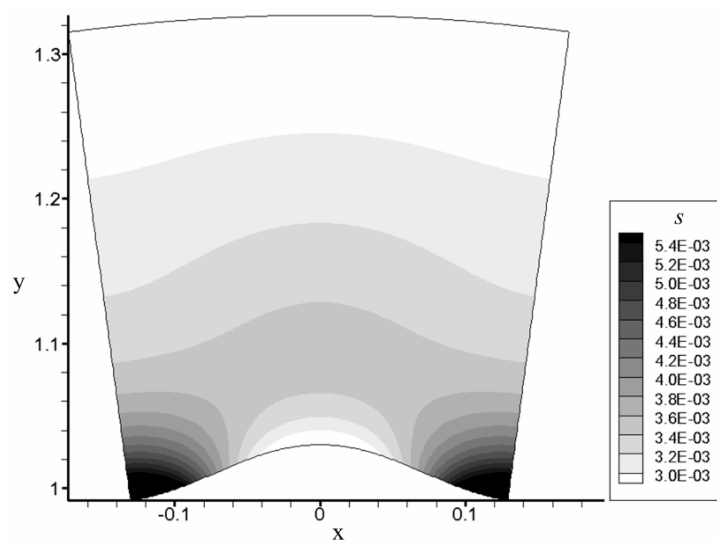


Рис. 12

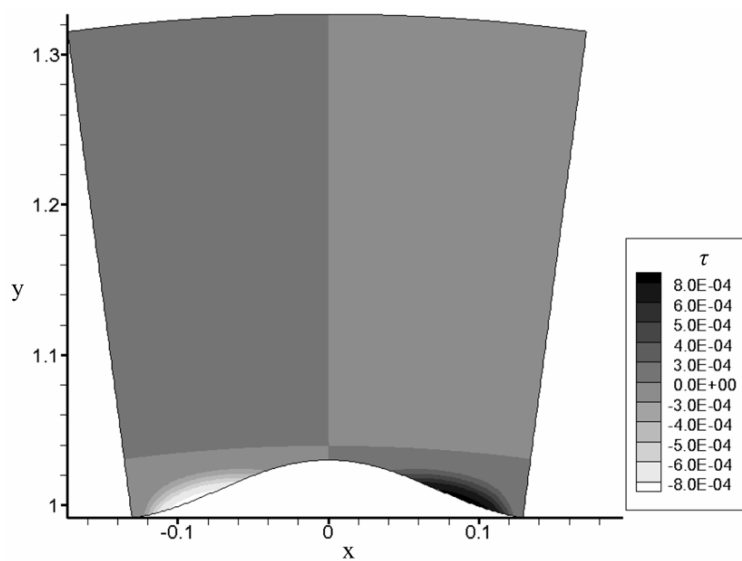


Рис. 13

Во всех этих случаях особый интерес представляют компоненты касательных напряжений τ и их максимальный уровень в зонах резкого изменения кривизны внут-

ренного контура. Зная эти значения и запас прочности материала, можно оценить допустимый уровень внутреннего давления на внутреннюю поверхность кольца. Предложенный метод позволяет сделать это аналитически по фиксированному набору формул.

Выводы

В работе аналитически, с использованием метода возмущений, решена задача о квазистатическом напряженно-деформированном состоянии плоского упругого тела (толстая кольцевая оболочка переменной толщины) под действием нормальной нагрузки на его внутреннюю поверхность. Исследован случай, соответствующий многим прикладным задачам, когда внутренний контур оболочки мало отличается от окружности. Определено напряженно-деформированное состояние и концентрация напряжений в окрестности участков относительно малого радиуса кривизны внутреннего контура упругого кольца.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 15-08-02392-а.

Список литературы

1. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Численное решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет программ АСТРА. В кн. Вычислительная механика твердого деформируемого тела. – М.: Наука. 1991. С. 78-122.
2. Алямовский А.А., Собачкин А.А., Одинцов Е.В., Харитонович А.И., Пономарев Н.Б. SolidWorks Компьютерное моделирование в инженерной практике. – СПб.: БХВ-Петербург. 2006.
3. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций. // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 22-33.
4. Иноземцев А.А., Нихамкин М.А., Сандрацкий В.Л. Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок. – М.: Машиностроение. 2008. 204с.
5. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир. 1984. 535с.
6. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. - М: Машиностроение. 1978. 247с.
7. Бураго Н.Г., Никитин И.С., Юшковский П.А. Долговечность дисков переменной толщины с учетом анизотропии усталостных свойств. // Известия РАН. МТТ. 2015. N. 5. С. 84-98.
8. Бураго Н.Г., Никитин И.С., Юшковский П.А. Численно-аналитический метод расчета колебаний упругого диска переменной толщины. Актуальные проблемы механики. 50 лет ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского. Сборник статей. Москва. Академиздатцентр <Наука>. 2015г. С.489-497.
9. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

Николай Георгиевич Бураго¹

Илья Степанович Никитин²

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

²Институт автоматизации проектирования РАН

**ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ
НА ПЛОСКИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫЕ УПРУГИЕ КОЛЬЦА
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**



Подписано к печати 21 апреля 2016 г. Заказ № 8-2016 Тираж 40 экз.

Отпечатано в ФЕДЕРАЛЬНОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УЧРЕЖДЕНИИ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю.ИШЛИНСКОГО РАН

119526 Москва, пр-т Вернадского, 101-1